SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. FRANCHI

EQUAZIONI ELLITTICHE DEGENERI NEL PIANO

12 MAGGIO 1988

1. Premettiamo alcuni richiami. Denotiamo con $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ N funzioni lipschitziane limitate e nonnegative su R^N. Se $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_N)$, diremo che il vettore $u\in R^N$ è sub-unitario (SU) in x se

$$\forall\xi\in R^N \quad \langle u,\xi\rangle^2 \le \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^2(x)\xi_j^2$$

Una curva assolutamente continua $\gamma:[0,T]\to R^N$ si dirà λ-sub-unitaria se

$\dot\gamma(t)$ *è sub-unitario in* $\gamma(t)$ *q.d. su* $[0,T]$.

Assegnati ora due punti $x,y\in R^N$ se esiste una curva sub-unitaria che li congiunge, definiamo la loro distanza nel modo seguente:

$$d(x,y) = \inf\{T>0;\ \exists\gamma:[0,T]\to R^N,\ \gamma(0) = x,$$

$$\gamma(T) = y\ ,\ \gamma\ \lambda\text{-sub-unitaria}\}.$$

Diremo che $d(x,y) = +\infty$ in caso contrario. Se $d(x,y) < +\infty$, $\forall x,y\in R^N$, diremo che R^N è λ-connesso.

Il risultato che intendiamo provare dà una caratterizzazione delle sfere $B_d(x,\rho)$ nella metrica d per $x\in R^N$ e $\rho>0$. Nel seguito, quando non vi sia ambiguità, ometteremo l'indice λ parlando di curve sub-unitarie e scriveremo B per B_d.

Introduciamo alcune notazioni. Denoteremo con $L>0$ un numero reale positivo tale che

$$|\lambda(x)-\lambda(y)| \le L|x-y| \quad x,y\in R^N.$$

Siano $x\in R^N$, $\rho>0$ fissati. Poniamo

$$C_j(x,\rho)=\{u_j(t),\ 0\leq t\leq\rho\ ,\ u=(u_1,\dots,u_N)\ \text{SU},\ u(0)=x\}\quad j=1,\dots,N.$$

E' immediato verificare che

(1.1) $C_j(x,\rho)$ *è un intervallo chiuso e limitato contenente* x.

Definiamo ora

$$\Lambda_k(x,\rho)=\max_{\substack{s_j\in C_j(x,\rho)\\ j\neq k}}\lambda_k(s_1,\dots,s_{k-1},x_k,s_{k+1},\dots,s_N).$$

Nel seguito, supporremo sempre che

(H.1) R^N *è* λ*-connesso e* d *è continua rispetto alla metrica euclidea.*

Una conseguenza immediata di (H.1) è la seguente:

(1.2) $\forall x\in R^N,\ \forall\rho>0\ \ \lambda_k(x,\rho)>0$ *per* $k=1,\dots,N$.

Supponiamo infatti che esistano $\bar{x},\bar{\rho},k$ tali che $\lambda_k(\bar{x},\bar{\rho})=0$. Sarà allora $\lambda_k(\bar{x},\bar{\rho})\equiv 0$ per $\rho\in[0,\bar{\rho}]$. Sia ora $y\in B(\bar{x},\bar{\rho})$; per definizione esiste $\gamma:[0,T]\to R^N$, γ SU, $\gamma(0)=\bar{x}$, $\gamma(T)=y$, $0<T<\bar{\rho}$. Dunque, se $0<t\leq T$,

$$|\gamma_k(t)-\bar{x}_k|\leq\int_0^t\lambda_k(\gamma(s))ds\leq\int_0^t\lambda_k(\lambda_1(s),\dots,x_k,\dots)ds+$$

$$+L\int_0^t|\gamma_k(s)-\bar{x}_k|ds\leq t\,\Lambda_k(\bar{x},t)+L\int_0^t|\gamma_k(s)-\bar{x}_k|ds=$$

$$=L\int_0^t|\gamma_k(s)-\bar{x}_k|ds.$$

Dunque, per la disuguaglianza di Gronwall, $\gamma_k(t) \equiv \bar{x}_k$. Ma allora la successione $\bar{x} + \frac{1}{n} e_k \to \bar{x}$ per $n \to \infty$ rispetto alla metrica euclidea mentre $d(\bar{x} + \frac{1}{n} e_k, \bar{x}) \geq \bar{\rho}$. Ciò prova l'asserto.

Denotiamo con $Q(x,\rho)$ il parallelepipedo di R^N definito nel modo seguente:

$$Q(x,\rho) = \prod_{k=1}^{N} (x_k - \rho\Lambda_k(x,\rho),\ x_k + \rho\Lambda_k(x,\rho)).$$

E' immediato verificare che esiste una costante $a>1$ tale che

$$B(x,\rho) \subset Q(x,a\rho) \quad \forall x \in R^N,\ \forall \rho \in [0,1]. \tag{1.3}$$

Se infatti $y \in B(x,\rho)$ esiste una curva SU $\gamma:[0,T] \to R^N$ tale che $\gamma(0)=x$, $\gamma(T)=y$, $T < \rho$. Dunque, se $0<t\leq T$,

$$|\gamma_j(t)-x_j| \leq \int_0^t \lambda_j(\gamma(s))ds \leq \int_0^t \lambda_j(\gamma_1(s),\ldots,x_j,\ldots)ds +$$

$$+ L\int_0^t |\gamma_j(s)-x_j|\, ds \leq t\Lambda_j(x,t) + L\int_0^t |\gamma_j(s)-x_j|ds, \quad \text{per } j=1,\ldots,N.$$

Dunque, per la disuguaglianza di Gronwall,

$$|\gamma_j(t)-x_j| \leq t\Lambda_j(x,t) + L\int_0^t s\Lambda_j(x,s)\, e^{L(t-s)}ds \leq$$

$$\leq (1+L\int_0^t e^{L(t-s)}ds)t\Lambda_j(x,t) \leq at\Lambda_j(x,t) \leq at\Lambda_j(x,at),$$

dove $a = e^L > 1$.

In particolare, quindi,

$$|y_j - x_j| = |\gamma_j(T) - x_j| \leq a\rho\, \Lambda_j(x, a\rho).$$

Proveremo ora che esiste una costante b>0 tale che

(1.4) $$Q(x,\rho) \subset B(x, b\rho) \quad \forall x \in R^N, \ \forall \rho \in (0, \rho_0].$$

La dimostrazione è più complessa di quella dell'inclusione inversa. Procediamo quindi a provare alcuni fatti preliminari.

(1.5) *Fissati* x *e* $\rho \in (0, \rho_0]$ *esiste un riordinamento delle variabili (dipendente da* x *e* ρ*) tale che*

(i) $\Lambda_1(x,\rho) \geq \lambda_2(x,\rho) \geq \ldots \geq \Lambda_N(x,\rho)$

(ii) $$\Lambda_k(x,\rho) \leq 2\Lambda_k^*(x,\rho) = 2 \max_{\substack{s_j \in C_j(x,\rho) \\ j < k}} \lambda_k(s_1, \ldots, s_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots).$$

<u>Dimostrazione</u>. Permutiamo gli indici $\{1, \ldots, N\}$ in modo che (i) sia soddisfatta e rinumeriamo in corrispondenza le variabili. Osserviamo che, fissato $k \in \{1, \ldots, N\}$, se $s_j \in C_j(x,\rho)$, $j \neq k$, si ha:

(1.5.1) $$\lambda_k(s_1, \ldots, s_{k-1}, x_k, s_{k+1}, \ldots) \leq \lambda_k(s_1, \ldots, s_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots) + L \sum_{\ell=k+1}^{N} |s_\ell - x_\ell|.$$

D'altra parte, se $\ell \geq k+1$ è fissato, esiste γ SU, $\gamma(0) = x$, $\gamma_\ell(t_0) = s_\ell$ con $0 \leq t_0 \leq \rho$. Ora, se $0 \leq t \leq t_0$,

$$|\gamma_\ell(t)-x_\ell| \leq \int_0^t \lambda_\ell(\gamma(\sigma))d\sigma \leq \int_0^t \lambda_\ell(\gamma_1(\sigma),\dots,x_\ell,\dots)d\sigma +$$

$$+ L\int_0^t |\gamma_\ell(\sigma) - x_\ell|d\sigma \leq t\Lambda_\ell(x,t) + L\int_0^t |\gamma_\ell(\sigma)-x_\ell|d\sigma.$$

Allora, per la disuguaglianza di Gronwall,

$$|s_\ell - x_\ell| \leq at_0\Lambda_\ell(x,t_0) \leq a\rho\Lambda_\ell(x,\rho) \leq (\text{poiché } \ell>k) \quad a\rho\Lambda_k(x,\rho).$$

Dunque da (1.5.1) segue che

$$\Lambda_k(x,\rho) \leq \Lambda_k^*(x,\rho) + L(N-k)a\rho\Lambda_k(x,\rho)$$

e quindi la (ii) se $\rho_0 < 1/2LN\, a$.

Siamo ora in grado di provare (1.4). Siano x e ρ fissati e rinumeriamo le variabili come in (1.5). Per semplicità, diamo la dimostrazione nel caso $N = 3$.

Siano $\bar{s}_1$, $\bar{\sigma}_1 \in C_1(x,\rho)$, $\bar{\sigma}_2 \in C_2(x,\rho)$ tali che

$\lambda_2(\bar{s}_1,x_2,x_3) = \Lambda_2^*(x,\rho)$, $\lambda_3(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,x_3) = \Lambda_3^*(x,\rho)$. Inoltre possiamo sempre supporre $\lambda_1 \equiv \Lambda_1 \equiv 1$.

Osserviamo ora che, per definizione, esiste una curva SU γ tale che $\gamma(0) = x$, $\gamma_1(t_0) = \bar{s}_1$, con $0 \leq t_0 \leq \rho$. Dunque

$$(1.4.1) \qquad |\bar{s}_1 - x_1| \leq \int_0^t |\dot{\gamma}_1(\sigma)|d\sigma \leq t_0 \leq \rho \text{ e, analogamente, } |\bar{\sigma}_1 - x_1| \leq \rho.$$

Inoltre, esiste una curva SU opportuna γ tale che $\gamma(0) = x$, $\gamma_2(t_0) = \bar{\sigma}_2$, con $0 \leq t_0 \leq \rho$. Argomentando come in precedenza si ha allora:

$$|\gamma_2(t)-x_2| \leq at\ \Lambda_2(x,t),$$

e dunque

$$(1.4.2) \qquad |\bar{\sigma}_2 - x_2| \leq a\, t_o \Lambda_2(x,t_o) \leq a\rho\Lambda_2(x,\rho) \leq 2a\rho\Lambda_2^*(x,\rho).$$

Sia ora $y \in Q(x,\rho)$; supponiamo $y_j > x_j$ per $j = 1,2,3$. Nei casi diversi, la dimostrazione verrà modificata in modo ovvio.

Per provare che $d(x,y) < b\rho$, utilizzando una tecnica già sfruttata in casi precedenti ([FL1],[FL2]), costruiremo una poligonale da x a y i cui lati sono curve integrali dei campi $\pm X_j = \pm \lambda_j \partial_j$, per $j = 1,2,3$, nel modo seguente:

(1) da (x_1,x_2,x_3) a $(\bar{s}_1,x_2,x_3)$ lungo $\pm X_1$,

(2) da $(\bar{s}_1,x_2,x_3)$ a $(\bar{s}_1,\bar{\sigma}_2,x_3)$ lungo $\pm X_2$,

(3) da $(\bar{s}_1,\bar{\sigma}_2\ x_3)$ a $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,x_3)$ lungo $\pm X_1$,

(4) da $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,x_3)$ a $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,y_3)$ lungo X_3,

(5) da $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,y_3)$ a $(\bar{s}_1,\bar{\sigma}_2,y_3)$ lungo $\pm X_1$,

(6) da $(\bar{s}_1,\bar{\sigma}_2,y_3)$ a $(\bar{s}_1,y_2,y_3)$ lungo $\pm X_2$,

(7) da $(\bar{s}_1,y_2,y_3)$ a (y_1,y_2,y_3) lungo $\pm X_1$.

Si tratta ora di provare che ciascuno dei sette archi precedenti ha lunghezza (richiede cioè un tempo di percorrenza) che può essere controllata da una costante assoluta (che dipende solo da N,L) moltiplicata per ρ. E' ovvio, innanzitutto, che, per (1.4.1) e (1.4.2), la lunghezza dell'arco (1) è $\leq\rho$, mentre le lunghezze degli archi (3), (5) e (7) sono $\leq 2\rho$.

Valutiamo ora la lunghezza degli archi (2) e (6); valuteremo cioè la lunghezza di un arco lungo $\pm X_2$ da $(\bar{s}_1,\xi_2,\xi_3)$ a $(\bar{s}_1,\bar{\sigma}_2,\xi_3)$ essendo $|\xi_2-x_2|<\rho\Lambda_2(x,\rho)$ e $|\xi_3-x_3|<\rho\Lambda_3(x,\rho)$. Per fissare le idee, supponiamo $\sigma>\xi_2$.

Sia ϕ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \lambda_2(\bar{s}_1,\phi,\xi_3) \\ \phi(0) = \xi_2. \end{cases}$$

E' evidente che la curva $t\to(\bar{s}_1,\phi(t),\xi_2)$ è SU. Osserviamo poi che $\lambda_2(\bar{s}_1,\xi_2,\xi_3)>0$. Infatti

$$\lambda_2(\bar{s}_1,\xi_2,\xi_3) \geq \lambda_2(\bar{s}_1,x_1,x_3)-L|\xi_2-x_2|-L|\xi_3-x_3| \geq \tag{1.4.3}$$

$$\geq \Lambda_2^*(x,\rho)-\rho L\Lambda_2(x,\rho)-\rho L\Lambda_3(x,\rho) \geq (\text{per (1.5) (i) e (ii)})$$

$$\frac{1}{2}\Lambda_2(x,\rho)-2L\rho\Lambda_2(x,\rho) \geq \frac{1}{4}\Lambda_2(x,\rho)$$

se $\rho_0 < 1/8L$.

Dunque, tenendo conto del fatto che $\dot{\phi} \geq 0$,

$$\phi(t)-\xi_2 = \int_0^t \lambda_2(\bar{s}_1,\phi(s),\xi_3)ds \geq \int_0^t \lambda_2(\bar{s}_1,\xi_2,\xi_3)ds -$$

$$- Lt(\phi(t)-\xi_2) \geq (\text{per (1.4.3)})\ \frac{t}{4}\Lambda_2(x,\rho)-Lt(\phi(t)-\xi_2)$$

Allora, se $t\leq 1$,

$$\phi(t) - \xi_2 \geq \frac{t}{4(1+L)}\Lambda_2(x,\rho)$$

e quindi $\phi([0,1]) \supset [\xi_2,\xi_2 + \frac{\Lambda_2(x,\rho)}{4(1+L)}]$.

Poichè $0\leq\bar{\sigma}_2-\xi_2\leq |\bar{\sigma}_2-x_2|+|\xi_2-x_2|\leq(a+1)\rho\Lambda_2(x,\rho)$, purchè $\rho_0<1/4(1+L)(a+1)$, sarà

$\phi_2 \quad \rho([0,1])$ e quindi $\bar{\sigma}_2 = \phi(t_o)$ per un dato $t_o \in [0,1]$. D'altra parte

$$(a+1)\rho\Lambda_2(x,\rho) \geq \bar{\sigma}_2 - \xi_2 = \phi(t_o) - \xi_2 \geq \frac{t_o}{4(1+L)} \Lambda_2(x,\rho),$$

e quindi $t_o \leq 4(1+L)(a+1)\rho$. Ciò ci permette di stimare la lunghezza degli archi (2) e (6).

Più semplice è stimare la lunghezza dell'arco (4). Consideriamo la soluzione ϕ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \lambda_3(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \phi) \\ \phi(0) = x_3 \end{cases}$$

E' evidente che la curva $t \to (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \phi(t))$ è SU. Per (1.5) e (1.2), $\lambda_3(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, x_3) > 0$. Argomentando poi come sopra, se $t \leq 1$ risulta

$$\phi(t) - x_3 \geq \frac{t}{1+L} \Lambda_3(x,\rho).$$

Ciò assicura che $\phi([0,1]) \supset [x_3, x_3 + \frac{\Lambda_3(x,\rho)}{1+L}]$. D'altra $0 < y_3 - x_3 < \rho\Lambda_3(x,\rho) <$ $< \frac{\Lambda_3(x,\rho)}{1+L}$ se $\rho_o < \frac{1}{1+L}$, e quindi esiste $t_o \quad [0,1]$ tale $y_3 = \phi(t_o)$. Sarà allora

$$\rho\Lambda_3(x,\rho) \geq y_3 - x_3 \geq \frac{t_o}{1+L} \Lambda_3(x,\rho)$$

e quindi $t_o \leq \rho(1+L)$. Ciò permette di stimare la lunghezza dell'arco (4) e quindi di provare l'asserto (1.4) con $b = (1+L)(8(a+1)+1)+7$.

Dunque

(1.6) $\qquad Q(x,\rho/b) \subset B(x,\rho) \subset Q(x,a\rho) \quad \forall x,\rho,\ \rho$ sufficientemente vicino a zero.

Vedremo nel seguito che un importante ruolo per la regolarità di operatori differenziali associati ai campi $X_1,\dots,X_n$ è sostenuto dalla (eventuale) *proprietà di duplicazione* (PD) della metrica d. Più precisamente:

Diremo che la metrica d *è* PD *e che lo spazio* (R^N,d,dx) *(essendo* dx *la misura di Lebesgue) è di tipo omogeneo se esiste* $A>1$ *tale che*

(1.7) $$|B(x,2\rho)| \leq A|B(x,\rho)| \quad \forall x,\rho.$$

Dalla (1.6) segue che (1.7) è equivalente a

(1.8) $$|Q(x,2\rho)| \leq B|Q(x,\rho)| \quad \forall x,\rho \quad \textit{per } B>1 \textit{ fissato.}$$

Osserviamo infine che (1.8) è equivalente a

(1.9) $$\Lambda_k(x,2\rho) \leq B_k\, \Lambda_k(x,\rho) \quad \forall x,\rho$$

e per $B_k>1$ *opportuno per* $k = 1,\dots,N$.

Infatti chiaramente (1.9) implica (1.8). D'altra parte

$$2\Lambda_k(x,2\rho) = \frac{|Q(x,2\rho)|}{2^{N-1}\prod_{j\neq k}\Lambda_j(x,2\rho)} \leq$$

$$\leq 2^{1-N}B\frac{|Q(x,\rho)|}{\prod_{j\neq k}\Lambda_j(x,2\rho)} \leq 2^{1-N}B\frac{|Q(x,\rho)|}{\prod_{j\neq k}\Lambda_j(x,\rho)} = 2^{1-N}B\Lambda_k(x,\rho).$$

Ricordiamo che: se $\phi:R_+ \to R_+$ è una funzione crescente tale che $\phi(2t) \leq C\phi(t)$, allora

(1.10) se $\theta \in (0,1)$, $\phi(\theta t) \geq \frac{1}{C} \theta^{\alpha} \phi(t)$, $\alpha = \log_2 C$.

Incidentalmente, per sottolineare l'importanza di (1.7) in questioni di regolarità, notiamo che, se (1.7) è verifiata, per (1.9) e (1.10)

$$B_d(x,\rho) \supset B_{euclidea}(x, C\rho^{\varepsilon}),$$

per opportune costanti C ed ε. Allora se $\lambda_j \in C^{\infty}$ per $j = 1,\dots,N$ l'operatore $L = \sum_j X_j^2$ è sub-ellittico, per un risultato di [F/P] (se N = 2 l'affermazione è ancora vera se $\lambda_j \in C^1$, per [X]). D'altra parte, un esempio di Morimoto esibisce un operatore in R^2 con $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv 1$, $\lambda_3 = \lambda_3(x_1) \in C^{\infty}$ per il quale la metrica d è continua, (1.7) non è verificata e $\partial_1^2 + \partial_2^2 + \lambda_3^2 \partial_3^3$ non è ipoellittico.

2. In R^2 consideriamo un operatore del secondo ordine in forma di divergenza

$$L = \sum_{i,j} \partial_i (a_{ij}, \partial_j)$$

dove $a_{ij} = a_{ji} \in L^{\infty}$ per $i,j = 1,2$.

Supporremo che

(2.1) *esiste* $\nu < 1$ *tale che*

$$\nu\omega(x)(\xi_1^2 + \lambda^2 \xi_2^2) \leq \sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \frac{1}{\nu}\, \omega(x)(\xi_1^2 + \lambda^2\xi_2^2) \quad \forall x,\xi ,$$

dove

(2.2) λ *è una funzione non negativa lipschitziana e limitata*;

(2.3) *la distanza* d *associata ai campi* ∂_1 *e* $\lambda\partial_2$ *è hölderiana rispetto alla metrica euclidea e* (R^2,d,dx) *è uno spazio di tipo omogeneo;*

(2.4) *esiste* $M\in(0,1]$ *tale che* $\forall t\in(0,t_0]$, $\forall x=(x_1,x_2)\in R^2$

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{t}\lambda(x_1+s,x_2)ds \geq M \max_{|s|\leq t}\lambda(x_1+s,x_2)=\Lambda(x,t).$$

(2.5) ω *è un peso* A_2 *rispetto alla distanza* d, *cioè*

$$\fint_{B(x,\rho)} w(x)dx \ \left(\fint_{B(x,\rho)} w^{-1}(x)dx\right)^{-1} \leq c_{\omega,2}$$

$\forall x\in R^2$, $\rho\in(0,\rho_0]$.

Sotto le ipotesi precedenti, esiste una classe di spazi naturali associati all'operatore L: ad esempio, se $1<p<\infty$ e $\Omega\subset R^2$, denoteremo $H^1_{\lambda,w}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni u tali che

$$\int_\Omega(|\partial_1 u|^p+|\lambda\partial_2 u|^p)w(x)dx+\int_\Omega|u|^p w(x)dx<+\infty.$$

In modo standard si definiscono allora gli spazi locali, le soluzioni, le sopra(sotto)soluzioni... (si veda, ad es., [F/S]).

Siamo ora in grado di provare il risultato seguente:

<u>Teorema I.</u> *Siano soddisfatte* (3.1)-(3.5). *Allora*

(i) *se* $u \in H^{1,loc}_{\lambda,\omega}(\Omega)$ *è una soluzione debole nonnegativa di* $Lu=0$, *allora* u *soddisfa una disuguaglianza di Harnack invariante, esiste cioè* $C>0$ *indipendente da* u *tale che* $\forall x \in \Omega$, $\forall \rho < \rho_0(x)$

$$\sup_{B(x,\rho)} u \leq C \inf_{B(x,\rho)} u$$

(ii) *se* $u \in H^{1,loc}_{\lambda,\Omega}$ *è soluzione debole di* $Lu = 0$, *allora* u *è hölderiana* *(Teor. di De Giorgi-Nash-Moser).*

Prima di dare un'idea della dimostrazione (che ripercorre le linee di [F/S]), premettiamo alcune considerazioni sulle ipotesi. Risultati analoghi al teorema I sono noti nei casi seguenti:

(i) $\inf \lambda>0$ ([F/K/S] e caso ellittico se $\omega \equiv 1$);

(ii) $\lambda = \lambda(|x_1|)$, $0 \leq t\lambda'(t) \leq \alpha\lambda(t)$ per $t \neq 0$ ([F/S] e [F/L2] se $\omega \equiv 1$);

(iii) $\omega \equiv 1$, $\lambda=|\mu|$, $\mu \in C^\infty$, $\partial_1^m \mu \neq 0$ per un $m \in N$ opportuno in un intorno di un punto dato x_0 (condizione di Hörmander), per [N/S/W] e altri.

Osserviamo allora che nei casi (ii) e (iii) (il caso (i) è ovvio) le ipotesi (2.1)-(2.4) sono soddisfatte. Per quanto riguarda il caso (ii), è provato in [F/L1] che 2.3 è soddisfatta.

D'altra parte, sempre per i risultati di [F/L1] se, ad esempio $x_1 \geq 0$ si ha:

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{t} \lambda(x_1+s)ds \geq \frac{1}{t}\int_{t/2}^{t} \lambda(x_1+s)ds \geq \frac{1}{2}\lambda(x_1+\frac{t}{2}) \geq c_\alpha \lambda(x_1+t) = c_\alpha \max_{|s|\leq t} \lambda(x_1+s).$$

Per quanto riguarda il caso (iii), la proprietà (2.3) è provata in [N/S/W]. Proviamo che anche (3.4) è verificata. Iniziamo con l'osservare che

(2.6) *Se* p *è un polinomio reale di grado* $\leq n$, *esiste una costante* $c_n > 0$ *dipendente solo da* n *tale che*

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{t} |p(s)|ds \geq c_n \max_{|s|\leq t} |p(s)| \ , \quad t>0.$$

Basta infatti osservare che, denotato con p_t il polinomio $p_t(s) = p(ts)$, l'affermazione precedente è equivalente a

$$(2.6') \qquad \int_{-1}^{1} |p_t(s)|ds \geq c_n \max_{|s|\leq 1} |p_t(s)|.$$

D'altra parte, entrambe le espressioni in (3.6') sono norme sullo spazio dei polinomi di grado $\leq n$ che ha dimensione finita e l'affermazione segue. Analogamente si può provare che, se $p(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$, esiste $c'_n > 0$ dipendente solo da n tale che

$$(2.7) \qquad \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} |p(s)|ds \geq c'_n \sum_{k=0}^{n} |a_k| \; |t|^k.$$

Se dunque (iii) è verificata, posto $x_0 = 0$ per $x \in K$ si ha:

$$\mu(x_1+s,x_2) = \sum_{k=0}^{m} \partial_1 \mu(x) \frac{s^k}{k!} + \Omega(x,s)s^{m+1} = p(x,s) + \Omega s^{m+1},$$

dove Ω è limitata in K. Allora, poichè $|\partial_1 \mu| \geq \mu_0 > 0$ in K,

$$\max_{|s|\leq t} |\mu(x_1+s,x_2)| \leq \max_{|s|\leq t} |p(x,s)| + Ct^{n+1} \leq \quad \text{(per (2.6))}$$

$$\leq \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} |p(x,s)|ds + Ct^{m+1} \leq \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} |\mu(x_1+s,x_2)|ds + C't^{m+1}.$$

D'altra parte, per (2.7),

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{t} |p(x,s)|ds \geq c_m' t^m |\partial_1^m \mu(x)| \geq c_m' \mu_o t^m$$

e quindi l'asserzione segue.

E' facile vedere però che la classe di operatori considerata nel Teorema I è più ampia e contiene situazioni non C^∞ essenzialmente diverse da quelle considerate in [F/L2] e [F/S].

Consideriamo ad esempio la funzione $\phi = \phi(|x_1|)$ costruita nel modo seguente: sia $\alpha>0$; poniamo $\phi(\frac{1}{n^\alpha}) = 0$, $\phi(\frac{1}{2n^\alpha} + \frac{1}{2(n+1)^\alpha}) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ e raccordiamo linearmente la ϕ tra questi punti. La funzione ϕ è lipschitziana, nonnegativa e limitata.

$$\max_{[o,t]} \phi = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \text{ per } \frac{1}{2}(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha}) \leq t \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha}).$$

Dunque $\Lambda(0,t) = \Lambda(t) \sim t^{1+1/\alpha}$. D'altra parte, se

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq t \leq \frac{1}{n^\alpha}, \quad \frac{1}{t}\int_0^t \phi(s)ds \geq \frac{1}{2t}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)^2 \geq$$

$$\geq c_1 \frac{1}{t}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\alpha+2}} \geq c_2 \frac{1}{t}\frac{1}{n^{2\alpha+1}} \geq c_3 t^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}-1} = c_3 t^{1+\frac{1}{\alpha}} \geq c_4 \Lambda(t).$$

Osserviamo ancora che, per la (PD) della funzione $t\to\Lambda(x,t)$, la (2.4) è equivalente a

$$\text{(2.4')} \qquad \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(x_1+s,x_2)ds \geq M' \max_{0\leq s\leq t} \lambda(x_1+s,x_2).$$

Dimostrazione del Teorema I. L'idea fondamentale è quella di costruire una famiglia di curve uscenti del centro di una sfera e che copra una parte significativa della sfera stessa. Successivamente, integrando lungo queste curve, si ottiene una formula di rappresentazione di una funzione u analoga a quella di u tramite un integrale frazionario del suo gradiente nel caso euclideo.

Sia $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $0<\varepsilon_i<1$, $i = 1,2$. Poniamo $\Delta_\varepsilon = [\varepsilon_1,1]\times[\varepsilon_2,1]$. Nel seguito, per semplicità scriveremo $t\Lambda(x,t) = F(x,t)$. Se $\xi = (\xi_1,\xi_2)\in R^2$, denotiamo con $H(t,x,\xi) = (H_1(\dots), H_2(\dots))$ la soluzione al tempo t del problema di Cauchy

$$\dot{H} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \lambda(H)\xi_2 \end{pmatrix} \qquad H(0,x,\xi) = x.$$

Proviamo che

(2.8) *Fissato* $\theta\in(0,1)$ *esistono* $\varepsilon=\varepsilon_\theta$, $c_\theta\in(0,1)$ *tali che* $\forall x\in R^2$, $\forall\rho\in(0,\rho_0]$

(i) $H(r,x,\cdot):\Delta_\varepsilon \to R^2$ *è iniettiva;*

(ii) $H(r,x,\Delta_\varepsilon) \supset [x_1+\theta_r, x_1+r] \times [x_2+\theta F(x,c_\theta r),\ x_2+F(x,c_\theta r)]$.

Sia infatti $y_1 \in [x_1+\theta r, x_1+r]$. Si ha:

$$H_1(r,x,\xi) = y_1 \quad x_1+r\xi_1=y_1 \quad \xi_1 = \frac{y_1-x_1}{r} \in [\theta,1].$$

Basta dunque scegliere $\varepsilon_{\theta,1} = \theta$.

Fissato ora ξ_1 in dipendenza da y_1, se $t \in (0,r]$ si ha: $(\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0)$

$$H_2(t,x,\xi) = x_2+\xi_2\int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,H_2)ds \geq$$

$$\geq x_2+\xi_2\int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds - L\xi_2\int_0^t (H_2(s,x,\xi)-x_2)ds$$

e, analogamente,

$$H_2(t,x,\xi) \leq x_2+\xi_2\int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds + L\xi_2\int_0^t (H_2(s,x,\xi)-x_2)ds.$$

Ora, se $\xi_2 \leq 1$ e $r<1/2L$ questo implica che

$$(2.9) \qquad 2\xi_2\int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds \geq H_2(t,x,\xi)-x_2 \geq \frac{2}{3}\int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds.$$

D'altra parte, ponendo $s\xi_1 = \sigma$, si ha

$$\int_0^t \lambda(x_1+s\ \xi_1,x_2)ds = \frac{1}{\xi_1}\int_0^{t\xi_1} (x_1+\sigma,x_2)d\sigma \geq$$

(poichè $t\xi_1 \leq t<r<r_0$ in (2.4')) $M'tA(x,t\xi_1) \geq M'F(x,\theta t)$.

Analogamente

$$\int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds \leq t\Lambda(x,t\xi_1) \leq F(x,t).$$

Dunque, se $t \in (0,r]$,

$$(2.10) \qquad 2\xi_2 F(x,t) \geq H_2(t,x,\xi) - x_2 \geq \frac{2M'}{3}\xi_2 F(x,\theta t) \geq F(x,c_1\theta t)\xi_2$$

(per (PD)).

Una prima conseguenza è allora che

$$[x_2, x_2 + F(x,c_1\theta r)] \subset H(r,x,\xi_1,[0,1]).$$

Scegliamo allora $c_\theta = c_1\theta$. Per quanto provato precedentemente, se $y_2 \in [x_2+\theta F(x,c_\theta r), x_2+F(x,c_\theta r)]$, esisterà $\xi_2 \in [0,1]$ tale che (ξ_1 è fissato) $y_2 = H(r,x,\xi_1,\xi_2)$. Dunque, per (2.10),

$$2\xi_2 F(x,r) \geq y_2 - x_2 \geq \theta F(x,c_\theta r)$$

e quindi

$$\xi_2 \geq \frac{\theta}{2}\,\frac{F(x,c_\theta r)}{F(x,r)} \geq \varepsilon_{\theta,2} > 0,$$

ancora per (PD). La (2.8)-(ii) è così provata.

Supponiamo ora per un momento da λ sia C^1.

Allora $\dfrac{\partial H_1}{\partial \xi_1} = t$, $\dfrac{\partial H_2}{\partial \xi_2} = 0$, $\dfrac{\partial H_2}{\partial \xi_2}$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial H_2}{\partial \xi_2} = (\partial_2\lambda)(H)\dfrac{\partial H_2}{\partial \xi_2}\,\xi_2 + \lambda(H) \\[2ex] \dfrac{\partial H_2}{\partial \xi_2}(0) = 0 \end{cases}$$

e quindi, se $t \leq r < r_0$ e $0 \leq \xi_2 \leq 1$,

$$\frac{\partial H_2}{\partial \xi_2}(t,x,\xi) = \int_0^t \lambda(H)\, e^{\xi_2 \int_s^t (\partial_2\lambda)(H)d\sigma}\, ds \geq$$

$$\geq e^{-r_0 \sup|\partial_2\lambda|} \int_0^t \lambda(H)ds.$$

D'altra parte,

$$\int_0^t \lambda(H)ds \geq \int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds - L\int_0^t (H_2(s,x,\xi)-x_2)ds \geq$$

$$\geq \int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds - Lt\int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,H_2)ds$$

e quindi, se $t \leq 1$

$$\text{(2.11.a)} \qquad \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2}(t,x,\xi) \geq \frac{e^{-r_0 \sup|\partial_2\lambda|}}{1+L} \int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds.$$

Analogamente, se $r_0 < 1/2L$

$$\text{(2.11.b)} \qquad \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2}(t,x,\xi) \leq 2\, e^{r_0 \sup|\partial_2\lambda|} \int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds.$$

Infine, se $0<t\leq r<r_0<1/2L$,

$$(2.11.c) \qquad \left|\frac{\partial H_2}{\partial \xi_1}(t,x,\xi)\right| \leq \dot{C}e^{r_0 \sup|\partial_2 \lambda|}$$

Osserviamo che le costanti (2.11.a), (2.11.b), (2.11.c) e r_0 dipendono solo da L; dunque un usuale procedimento di regolarizzazione permette di concludere che

$\xi \to H(t,x,\xi)$ è lipschitziana e, se $r_0 < 1/2L$,

$$2e^{\frac{1}{2}}\int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds \geq \left|\det \frac{\partial H}{\partial \xi}(t,x,\xi)\right| \geq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1+L}\, t\int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds.$$

Osserviamo infine che da (3.11.a) con analogo argomento segue che

$$|H_2(t,x,\xi_1,\xi_2')-H_2(t,x,\xi_1,\xi_2'')| \geq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1+L}\int_0^t \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds \cdot |\xi_2'-\xi_2''|,$$

e dunque (i) di (2.8) poichè λ non può annullarsi identicamente su un intervallo.

Sia ora

$$S_+^\theta(x,r)=[x_1+\theta r,x_1+r]\times[x_2+F(x,c_\theta r),x_2+F(x,c_\theta r)],$$

$$Q^\theta(x,r)=[x_1-r,x_1+r]\times[x_2-F(x,c_\theta r),\ x_2+F(x,c_\theta r)],$$

$$Q^\theta{+}(x,r) = Q^\theta(x,r)\cap\{y_j\geq x_j,\ j = 1,2\}.$$

Nel seguito, quando non vi sia ambiguità, ometteremo di scrivere (x,r).

Supponiamo $u\in C^1$ e sia (per un $\beta\in(0,1)$)

$$(2.12) \qquad |E| = |\{y\in Q^\theta;u(y) = 0\}|\geq\beta|Q^\theta(x,r)|,$$

dove $\theta = \theta(\beta) = 1-\sqrt{1-\beta/2}$.

Possiamo sempre supporre $|E_+| = |E \cap Q_+^\theta| \geq \frac{\beta}{4}|Q^\theta|$. Risulta

$$|E_+ \cap S_+^\theta| \geq \frac{\beta}{8}|Q^\theta|. \tag{2.13}$$

Infatti

$$\frac{1}{4}|Q^\theta| = |Q_+^\theta| \geq |Q_+^\theta \cap (E \cup S_+^\theta)| = |(Q_+^\theta \cap E) \cup S_+^\theta| =$$

$$= |Q_+^\theta \cap E| + |S_+^\theta| - |E \cap S_+^\theta| = |E_+| + |S_+^\theta| - |E \cap S_+^\theta| \geq$$

$$\geq \frac{\beta}{4}|Q^\theta| + \frac{(1-\theta)^2}{4}|Q^\theta| - |E_+ \cap S_+^\theta| = \frac{1}{4}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)|Q^\theta| - |E_+ \cap S_+^\theta|$$, e quindi (2.13).

Sia ora $\Sigma = \{\xi \in \Delta_\varepsilon ; H(r,x,\xi) \in E_+\}$. Vogliamo stimare $|\Sigma|$. Ponendo $H(r,x,\xi) = y$, si ha:

$$|\Sigma| = \int_\Sigma d\xi = \int_{E_+} \left|\det \frac{\partial H}{\partial \xi}(r,x,\xi)\right|^{-1} dy \geq$$

$$\geq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}|E_+|\left(r\int_0^r \lambda(x_1+s\xi_1,x_2)ds\right)^{-1} \geq 2e^{-\frac{1}{2}}\frac{|E_+|}{|Q(x,r)|} \geq c_1(\beta), \text{ poichè } \theta=\theta(\beta).$$

Sia ora K una funzione C^∞ a supporto in $[\varepsilon_1/2,3/2]\times[\varepsilon_2/2,3/2]$, dove $\varepsilon=\varepsilon(\theta(\beta))$ e identicamente uno in Δ_ε. Si ha

$$|u(x)| = |u(x)-u(H(r,x,\xi))|K(\xi) \quad \xi \in \Sigma.$$

Quindi

$$|\Sigma|\;|u(x)| = \int_{\Sigma} |u(x)-u(H(r,x,\xi))|K(\xi)d\xi \leq$$

$$\leq \int_0^r dt \int_{\mathrm{supp}K} d\xi |\langle \nabla u(H(t,x,\xi)),\ \dot H(t,x,\xi) \rangle K(y)dy \leq$$

$$\leq \int_0^r dt \int_{\mathrm{supp}K} d\xi\ |\nabla_\lambda u(H(t,x,\xi))| \leq (H(t,x,\xi) = y)$$

$$\leq \frac{C_L}{M'} \int_0^r dt \frac{1}{|Q(x,t)|} \int_{H(t,x,\mathrm{supp}K)} dy\ |\nabla_\lambda u(y)|.$$

D'altra parte, $t\to H(t,x,\xi)$ è una curva SU $\forall \xi \in \mathrm{supp}K$, ed essendo suppK limitato, esiste $c_2>0$ tale che $H(t,x,\mathrm{supp}K) \subset B(x,c_2 t)$. Dunque, tenendo conto anche della stima di $|\Sigma|$, possiamo concludere che, se $Q \in (0,1)$,

$$|u(x)| \leq c_3(\beta) \int_0^r dt|B(x,t)|^{Q-1} \sup_{\tau>0} |\ B(x,\tau)|^{-Q} \cdot$$

$$\cdot \int_{B(x,\tau)} |\nabla_\lambda u(y)| \chi_{B(x,c_2 r)}(y)dy$$

= (scrivendo per brevità $\chi_{B(x,c_2r)} = \chi_{c_2B}$ e designando con M_Q la funzione massimale frazionaria di esponente Q)

$$c_3(\beta) \int_0^r dt|B(x,t)|^{Q-1} \cdot M_Q(|\nabla_\lambda u|\chi_{c_2B})(x) =$$

$$= c_3(\beta)r \int_0^1 dt|B(x,\tau r)|^{Q-1} M_Q(|\nabla_\lambda u|\chi_{c_2B})(x) \geq$$

$$\leq c_3(\beta)r|B(x,r)|^{Q-1} \cdot M_Q(|\nabla_\lambda u|\chi_{c_2B})(x)\ \frac{1}{A}\int_0^1 d\tau\ \tau^{\alpha(Q-1)}\ ,$$

dove A è la costante di (PD) per la misura delle sfere e $\alpha = \log_2 A$. Scelto allora Q tale che $\alpha(Q-1)>-1$, si ha:

$$(2.14)\qquad |u(x)| \leq c_4(\beta) r |B(x,r)|^{Q-1} M_Q(|\nabla_\lambda u| \chi_{c_2 B})(x).$$

Usuali procedimenti di regolarizzazione permettono poi di estendere (2.14) a funzioni u lipschitziane.

Sia ora $\bar{x}$ fissato e sia u lipschitziana su $Q^{\theta(\beta)}(\bar{x},r) = \bar{Q}$ tale che $|\{y\in \bar{Q};\ u(y) = 0\}| \geq \beta|\bar{Q}|$. Se $x\in \bar{Q}$ esistono costanti assolute c_5 e c_6 tali che

$$Q^{\theta(\beta)}(x,c_5 r) \supset \bar{Q} \quad e \quad Q^{\theta(\beta)}(x,c_5 r) \subset Q(\bar{x},c_6 r).$$

Si ha:

$$|\{y\in Q^{\theta(\beta)}(x,c_5 r)\ ;\ u(y) = 0\} \geq |\{y\in \bar{Q}\ ;\ u(y) = 0\}|$$

$$\geq \beta|\bar{Q}| \geq \beta_1\ |Q^{\theta(\beta)}(x,c_5 r)|,$$

dove $\beta_1 = c_7\beta$, c_7 essendo una costante assoluta.

Dunque da (2.14), $\forall x\in \bar{Q}$ si ha:

$$(2.15)\qquad |u(x)| \leq c_8(\beta) r |\bar{Q}|^{Q-1} M_Q(|\nabla_\lambda u| \chi_{B(\bar{x},c_9 r)})(x).$$

Tenendo allora conto del fatto che, essendo $\omega\in A_2$

$$\omega(\bar{Q}) = \int_{\bar{Q}} \omega(x)dx \geq c_{10}(\beta)\omega(B(\bar{x},c_9 r)),$$

si ha che, se $p\geq 2$ e $k > 1$

$$\Big(\fint_{\bar Q} |u(x)|^{kp}\omega(x)dx\Big)^{1/kp} \le c_{11}(\beta) r\, |\bar Q|^{Q-1}\,.$$

$$\cdot \Big(\fint_{B(\bar x, c_9 r)} |M_Q(|\nabla_\lambda u|\chi_{B(\bar x,c_9 r)})(x)|^{kp}\,\omega(x)dx\Big)^{1/kp}\,.$$

D'altra parte, un teorema di continuità per la funzione massimale frazionaria in spazi di tipo omogeneo, in questo caso $(R^2,d,w(x)dx)$ ([F/S], Lemma 4.4) permette di maggiorare l'ultimo integrale scritto con

$$c_{12}(\beta) r \Big(\fint_{B(\bar x, c_9 r)} |\nabla_\lambda u|^p\Big)^{1/p} \quad \text{se} \quad k<(1-(1-Q)p/2)^{-1}.$$

Si ha dunque

$$\Big(\fint_{\bar Q} |u(x)|^{kp}\omega(x)dx\Big)^{1/kp} \le c_{12}(\beta) r \Big(\fint_{B(\bar x, c_9 r)} |\nabla_\lambda u|^p \omega(x)dx\Big)^{1/p}. \tag{2.16}$$

Scegliamo ora $\beta = 1/2$ e poniamo $\theta_0 = \theta(\frac{1}{2})$. Se c_{θ_0} è la costante di (2.8) e a è la costante di (1.3), se $r<r_0/\min\{a,2a/c_{\theta_0}\}$, si ha:

$B(\bar x,r)\subset Q(\bar x,ar)\subset Q^{\theta_0}(\bar x,\max\{a,2a/c_{\theta_0}\}r)$, in quanto

$F(\bar x,ar) \le F(\bar x, \max\{a,2a/c_{\theta_0}\}c_{\theta_0} r) = F(\bar x,\alpha r)$.

Come in [F/S] si determina allora $\mu\in R$ tale che

$$|\{y\in Q^{\theta_0}(\bar x,\alpha r);\ u\ge\mu\}| \ge \frac{1}{2}|Q^{\theta_0}(\bar x,\alpha r)|$$

e

$$|\{y\in Q^{\theta_o}(\bar{x},\alpha r);\ u\leq \mu\}| \geq \frac{1}{2}\,|Q^{\theta_o}(\bar{x},\alpha r)|.$$

Quindi, applicando (2.16) a $(u-\mu)^+$ e $(u-\mu)^-$ si ha:

$$\Big(\fint_{Q^{\theta_o}(\bar{x},\alpha r)} |u-\mu|^{kp}\omega(x)dx\Big)^{1/kp} \leq c_{12}(\tfrac{1}{2})r\Big(\fint_{Q(\bar{x},c_9 r)} |u|^p\omega(x)dx\Big)^{1/p}.$$

D'altra parte (b è definito in (1.4)):

$$|Q^{\theta_o}(\bar{x},\alpha r)|\leq|Q(\bar{x},\alpha r)|\leq|B(\bar{x},\alpha b r)|\leq c_{13}|B(\bar{x},r)|,$$

con c_{13} costante assoluta, e quindi

$$(2.17)\qquad \Big(\fint_{B(\bar{x},r)} |u-\mu|^{kp}\omega(x)dx\Big)^{1/kp} \leq c_{14}r\Big(\fint_{B(\bar{x},c_{15}r)} |\nabla_\lambda u|^p\omega(x)dx\Big)^{1/p},$$

dove $\mu=\mu(u,\theta_o,\alpha,\bar{x})$, e c_{14}, c_{15} sono costanti assolute.

In modo usuale allora da (2.17) si ricava la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré:

$$(2.18)\qquad \Big(\fint_{B(x,r)} |u-u_B|^{kp}w(x)dx\Big)^{1/pk} \leq c_{16}r\Big(\fint_{B(\bar{x},c_{15}r)} |\nabla_\lambda u|^p w(x)dx\Big)^{1/p},$$

dove c_{16} è una costante assoluta, e u_B o la media di u su $B(x,r)$ $\frac{1}{|B|}\int_B u\,dx$ o la media pesata $\frac{1}{\omega(B)}\int_B u\omega dx$.

A questo punto una tecnica introdotta da D. Jerison permette di utilizzare unicamente la struttura di spazio di tipo omogeneo di $(R^2,d,w(x)dx)$ per riportare la (2.18) a una disuguaglianza "sulla stessa sfera", sostituendo c_{15} con 1 e modificando eventualmente c_{16}.

Se ora u è una funzione lipschitziana su $B = B(\bar{x},r)$ tale che $|E| = |\{y\in B\ ;\ u(y) = 0\}| \geq \beta|B(\bar{x},r)|$, si ha:

$$|u_B| = |\frac{1}{|B|}\int_B u dx| = \frac{1}{|E|}\int_E |u-u_B| dx \leq \frac{1}{\beta}\ \frac{1}{|B|}\int_B |u-u_B| dx \leq$$

$$(\text{poiché } w\in A_2) c_{17}(\beta)\ (\frac{1}{w(B)}\int_B |u-u_B|^{kp}\omega(x)dx)^{1/kp}.$$

Combinando queste stime con la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré nella stessa sfera, si ottiene che:

(2.19) *se* u *è lipschitziana su* $B = B(\bar{x},r)$, r *sufficientemente piccolo e* $|\{y\in B\ ;\ u(y) \geq 0\}| \geq \beta|B|$, *allora*

$$(⨍_B |\omega|^{kp} (x)dx)^{1/kp} \leq c(\beta) r\ (⨍_B |\nabla u|^{p}\ \omega(x)dx)^{1/p}.$$

A questo punto si possono ripetere i classici argomenti di J. Moser adattati alla geometria di $(R^2,d,\omega(x)dx)$ come in [F/L2],[F/S] per provare il Teo rema I. Il solo punto che resta da provare è l'esistenza di funzioni cut-off mo dellate sulle sfere B o sui parallelepipedi Q.

Siano ora $0<r_1<r_2$ e sia ψ C^∞ su $[0,+\infty[$, $0\leq\psi\leq 1$, $\psi\equiv 1$ su $[0,r_1/r_2]$, $\psi\equiv 0$ su $[1,+\infty[$, $|\psi'(t)| \leq 2(1-r_1/r_2)^{-1}$. Consideriamo la funzione

$$\psi_{r_1,r_2}(y_1,y_2) = \psi(\frac{|y_1-x_1|}{r_2})\psi(\frac{|y_2-x_2|}{F(x,r_2)}).$$ ψ_{r_1,r_2} è C^∞. Se $y\in Q(x,r_1)$

$\frac{|y_1-x_1|}{r_2} \leq \frac{r_1}{r_2}$ e quindi il primo termine è = 1; inoltre

$$\frac{|y_2-x_2|}{F(x,r_2)} \leq \frac{r_1\Lambda(x,r_1)}{r_2\Lambda(x,r_2)} \leq \frac{r_1}{r_2}$$ poiché $\Lambda(x,r_1)\leq\Lambda(x,r_2)$,

e quindi anche il secondo termine è = 1, e quindi

$$\psi_{r_1,r_2}(y) = 1.$$

Se $y \notin Q(x,r_2)$, allora o $|y_1-x_1| \geq r_2$ o $|y_2-x_2| \geq F(x,r_2)$;

in ogni caso $\psi_{r_1,r_2}(y) = 0$.

Inoltre

$$|\partial_1 \psi_{r_1,r_2}(y)| \leq |\psi'(\frac{|y_1-x_1|}{r_2})| \frac{1}{r_2} \leq \frac{2}{r_2} \frac{1}{1-\frac{r_1}{r_2}} = \frac{2}{r_2-r_1}$$

Infine

$$|\lambda(y)\partial_2 \psi_{r_1,r_2}(y)| = \psi(\frac{|y_1-x_1|}{r_1})\lambda(y)|\psi'(\frac{|y_2-x_2|}{F(x,r_2)})| \frac{1}{F(x,r_2)} = I.$$

Ora, sarà $I \neq 0$ se $|y_1-x_1| < r_2$ e $\frac{r_1}{r_2} \leq \frac{|y_2-x_2|}{F(x,r_2)} \leq 1$; in tal caso possiamo scrivere,

se $r_2 \leq 1$

$$I \leq \lambda(y) \frac{2}{1-r_1/r_2} \frac{1}{F(x,r_2)} = 2 \frac{\lambda(y_1,x_1)+\lambda(y_1,y_2)-\lambda(y_1,x_2)}{(1-r_1/r_2)\, F(x,r_2)} \leq$$

$$\leq \frac{2Lr_2}{r_2-r_1} + \frac{2\Lambda(x,r_2)}{(1-r_1/r_2)F(x,r_2)} \leq \frac{2L}{r_2-r_1} + \frac{2\Lambda(x,r_2)r_2}{r_2(1-\frac{r_1}{r_2})F(x,r_2)} = (2L+2)\frac{1}{r_2-r_1}.$$

L'asserto è così provato.

BIBLIOGRAFIA

[F/L1] B. FRANCHI, E. LANCOÑELLI, Hölder Regularity Theorem for a Class of Linear Nonuniformly Elliptic Operators with Measurable coefficients, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4), 10 (1983), 523-541.

[F/L2] ———————————— , An Embedding Theorem for Sobolev Spaces Related to non-Smooth Fields and Harnack Inequality, Comm. P.D.E., 9 (1984), 1237-1264.

[F/K/S] E. FABES, C. KENIG, R. SERAPIONI, The Local Regularity of Solutions of Degenerate Elliptic Equations, Comm. P.D.E., 7 (1982), 77-116.

[F/P] C. FEFFERMAN e D.H. PHONG, Subelliptic Eigenvalue Problems, Conference on Harmonic Analysis, Wadsworth, 1981, 590-606.

[F/S] B. FRANCHI, R. SERAPIONI, Pointwise Estimates for a Class of Strongly Degenerate Elliptic Operators: a Geometrical Approach, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, in corso di stampa.

[N/S/W] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER, Balls and Metrics Defined by Vector Fields , Acta Math. 155 (1985), 103-147.

[X] C.J. XU, Opérateurs sons-elliptiques et régularité des solutions d'equations aux dérivées partielles du second ordre en deux variables,Comm. P.D.E.